

ルーカス定規を用いた平方根計算学習材の作成

大柴 佑太[†]

Yuta OSHIBA[†]

[†] 明星大学情報学部情報学科

1. はじめに

計算棒としてネイピアの骨とルーカス定規がある。ネイピアの骨の改良としてルーカス定規が作成された。改良された部分としてはネイピアの骨では値を求める際に演算を行う必要があったがルーカス定規においては演算を行うことなく値を求めることができる。ルーカス定規には既存の道具として乗算・除算の2つが存在する。棒を動かすことにより解を求めることができたことに驚きを感じたと同時にどのような構造になっているのか研究を行っていきたいと考えた。また、掛け算・割り算構造を用いることにより、他の計算方法にも応用することができるのではないかと考える。

本研究では乗算・除算構造の仕組みを利用し、平方根計算にも適用することができる道具を作成する。また、ルーカス定規を触って楽しむだけでなく、平方根計算をより身近に感じてもらうことできるように、ルーカス定規の仕組みや構造に着目してどのような背景が存在するのかを明らかにする。

2. 関連する道具

ネイピアの骨とは、ジョン・ネイピアが発明した掛け算や割り算を簡単に行うための道具である。ネイピアの棒は、木や金属、もしくは厚紙でできた細長い板。ネイピアの棒は9個の正方形に区切られており、一番上を除く全ての正方形が斜線によって左上と右下に分けられている。一番上の正方形には1桁の数字が書かれている。それ以外の正方形には、一番上の正方形に書かれた数を2倍した数から9倍した数までが順番に書かれている。

3. ルーカス定規

Henri Genaille と Édouard Lucas によって発明された。ルーカス定規の特徴として掛け算及び割り算を行う際に、左端の数字を掛けたり割ったりすることにより計算結果を読み取ることができる。ルーカス定規は掛け算や割り算の計算をするという道具である。

(1) 乗算構造及び特徴

1桁の数と1桁の数の掛け算を行なった際に十の位の数が発生することがある。発生した数に対してその数字がいくつの数であるのかを線を使って示すことができる。また、掛けられる数 (Index でない方の棒) には、線が複数記載されており、2桁以上の数を表す際にどこにどの数の棒をおいても常に成立する。16*3であればIndexの棒・1の棒・6の棒を用意する。6の棒に着目するとIndexの棒に記載された3の横列の6の棒の最初の数は8と記載がある。8からの矢印は1の棒では4に向いている。4の矢印はIndexの棒では0に向いている。このことから全ての数字を読むと048となり、解は48であることが確認できる。

例として3*4の計算を考える。

3*4であるので計算結果は12となる。よって上の桁に加えなければならない数は1となる。また、3との掛け算であるので、下の桁から足される可能性があるのは0・1・2のどれかになるので縦方向に3種類を用意する必要がある。全ての数に対して同じ方法で求めることができる。

(2) 除算構造および特徴

1の位	割られる数	2			3			4		
		商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り
2	2	1	1	0	0	0	2	0	0	2
2	12	6	6	0	4	4	0	3	3	0
2	22	11	1	0	7	7	1	5	5	2
2	32	16	6	0	10	0	2	8	8	0
2	42	21	1	0	14	4	0	10	0	2
2	52	26	6	0	17	7	1	13	3	0
2	62	31	1	0	20	0	2	15	5	2
2	72	36	6	0	24	4	0	18	8	0
2	82	41	1	0	27	7	1	20	0	2
2	92	46	6	0	30	0	2	23	3	0

図1: 1の位が2の場合をルーカス定規に変換

5			6			7			8			9		
商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り
0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2
2	2	2	2	2	0	1	1	5	1	1	4	1	1	3
4	4	2	3	3	4	3	3	1	2	2	6	2	2	4
6	6	2	5	5	2	4	4	4	4	0	3	3	3	5
8	8	2	7	7	0	6	6	0	5	5	2	4	4	6
10	0	2	8	8	4	7	7	3	6	6	4	5	5	7
12	2	2	10	0	2	8	8	6	7	7	6	6	6	8
14	4	2	12	2	0	10	0	2	9	9	0	8	8	0
16	6	2	13	3	4	11	1	5	10	0	2	9	9	1
18	8	2	15	5	2	13	3	1	11	1	4	10	0	2

図2: 1の位が2の場合をルーカス定規に変換

例として $232/4$ の構造を考える。4 で割る必要があるので Index の棒は 4 の横列となる。一番左の 2 の棒の Index に記載されている数字は上から $0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8$ である。0 の場合は、繰り下がりがなし。3 の場合は繰り下がりが 1。5 の場合は繰り下がりが 2。8 の場合は、繰り下がりが 3 を表している。すなわち $2/4$ 余り 2 $\cdot 12/4$ 余り 0 $\cdot 22/4$ 余り 2 $\cdot 32/4$ 余り 0 を表している。なお、4 で割っているので繰り下がりの数は $0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ しか存在しないので 4 の時は 4 段である。よって Index に記載されている数字の数だけ段が存在している。2 の棒に記載されている数字は $0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8$ であるが、この数字しか記載されていないのは図 2-7 の 2 の行 4 の列により $0 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8$ しか値が存在しないためである。使用方法としては図 2-12 の 4 つの棒を用意する。4 で割る必要があるので Index と記載された棒の 4 の横列に着目する。Index の隣の 2 の棒の一番先頭の数字から読み始め、左から右に矢印と辿っていくと解となる。この場合は、 $0 \cdot 5 \cdot 8$ である。よって解は 58 となる。

4. 提案手法と実験

本研究では開平法について検討を行う。開平法の実験として 100~990 までの値を対象に行う。値を 10 ずつに区切る。

開平法のアルゴリズムに基づき、以下の 2 つの手順によって解を求める。

具体的な手順

- ① p_m を計算する。
- ② a_m の値の見当をつける。

与えられた $\sqrt{x}$ に対し、 10^k の位を求める。

$$\sqrt{x} = \sum_{k \leq n} 10^k a_k$$

x の首位を a_n とする。n は $\sqrt{x} < 10^{k+1}$ を満たす最小の k とする。

また、 $\sqrt{x}$ の 10^m の位より上の位 p_m は分かっているとし、 10^m の位 a_m を求める。

p_m とは以下の式で表すことができる。

$$p_m = \sum_{k=m+1}^n 10^{k-m-1} a_k = 10^{n-m-1} a_n + 10^{n-m-2} a_{n-1} + \dots + 10 a_{m+2} + a_{m+1}$$

今回のケースでは値を 100~990 までと限定したため p_m における厳密な計算は不要である。

a_m においても以下の式で表すことができる。

$$a_m \leq \frac{10^{-2m} x - 100 p_m^2}{20 p_m}$$

また、 a_m の値は 0 から 9 までの 10 通りであるので、上記の a_m の式を用いて順に値を求めていく。

5. 実験結果

下記に開平法における実際の値の一部を示す。

先頭の桁

$n_1=1$ ならば $a_1=1$

$n_1=2$ ならば $a_1=1$

$n_1=3$ ならば $a_1=1$

$n_1=4$ ならば $a_1=2$

6. 考察

今回の計算方法を用いることによりこれより上の桁の値に関しては同様の方法を用いることにより作成することができる。今回のケースに関しては 100~990 の値を使用したためルucas定規の棒を 3 本しか用意しなかったため小数第 1 位までの値しか求めることができなかった。よっておよその値の検討しか行うことができなかったが数を拡張させることによりルucas定規の棒を増やすことが可能となるため厳密な値を求めることが可能となるのではないかと考える。また、 a_m の値は 0~9 までの 10 通りのどれかに該当する。よって p_m の値を考慮することにより全ての数において適用することができるのではないかと考える。

下記に開平法のアルゴリズムに基づき実際に作成したルucas定規を示す。

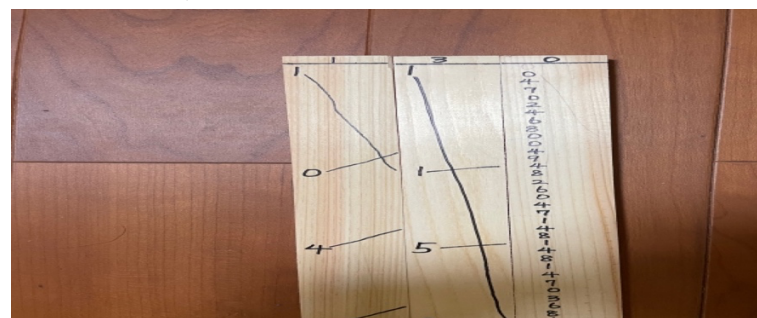


図5:開平法のアルゴリズムに基づき実際に作成したルucas定規

7. 今後の課題

数を拡張して研究を検討する必要がある。また、ルucas定規を使用することにより乗算・除算・平方根に関して構造に目を向けてもらうことができるような方法を検討する。そのためにどのような問いを用意すれば、ルucas定規を触って終わりではなく仕組みや構造に着目することができるのか今後検討していきたい。

参考文献

- [1] <https://wiis.info/blog/genaille-lucas-rulers/> (2022年1月閲覧)
- [2] Denis Roegel, "Napier's bones and Genaille-Lucas's rods, Sep 2015" <https://hal.inria.fr/hal-01198447/document>