ルーカス定規を用いた平方根計算学習材の作成

明星大学　情報学部　情報学科　　　４年
山中研究室　大柴佑太

目次

1.1 背景

計算棒としてネイピアの骨とルーカス定規がある。

ネイピアの骨の改良としてルーカス定規が作成された。

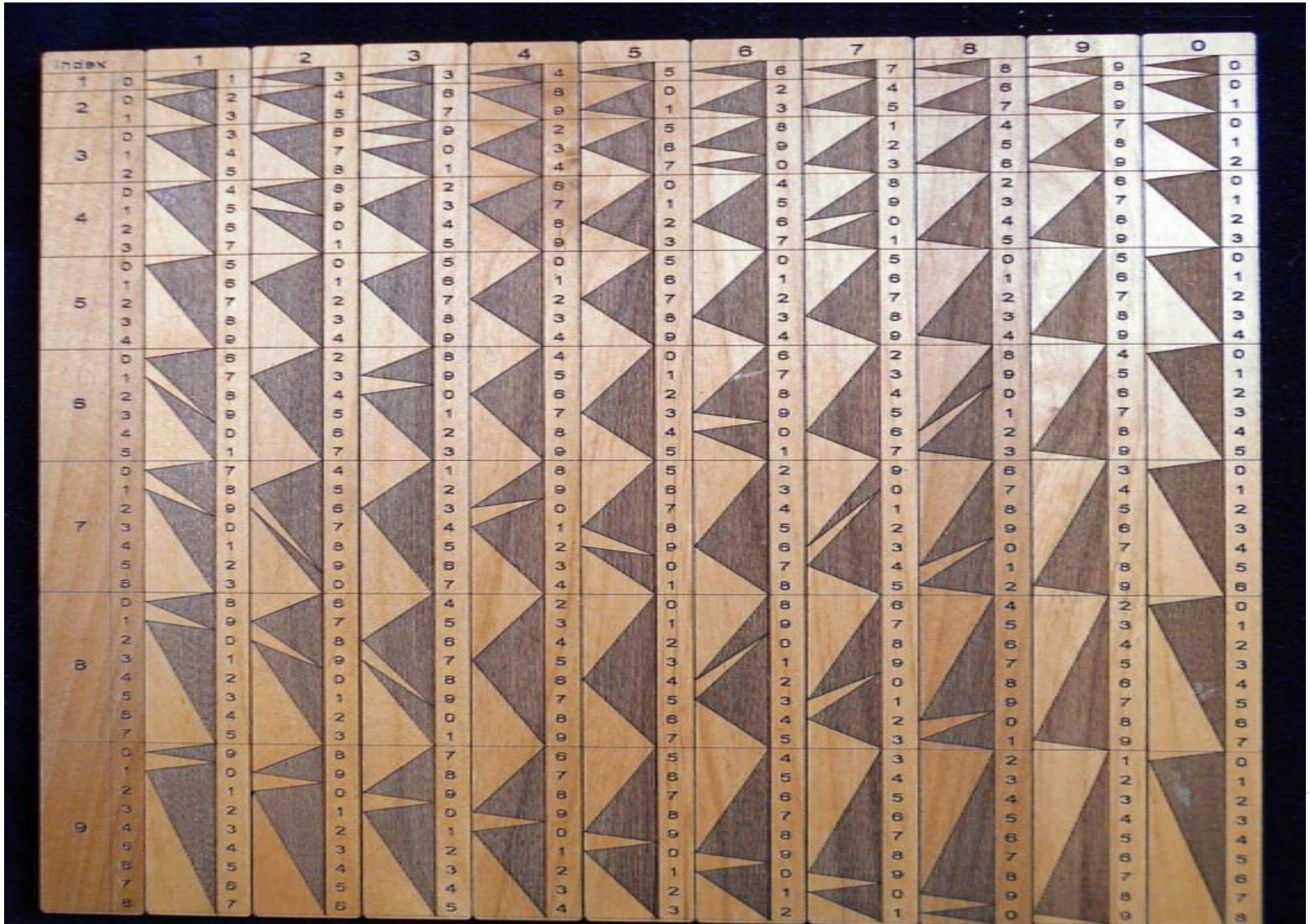
改良された部分としてはネイピアの骨では値を求める際に演算を行う必要があったがルーカス定規においては演算を行うことなく値を求めることができる。

1.2　背景

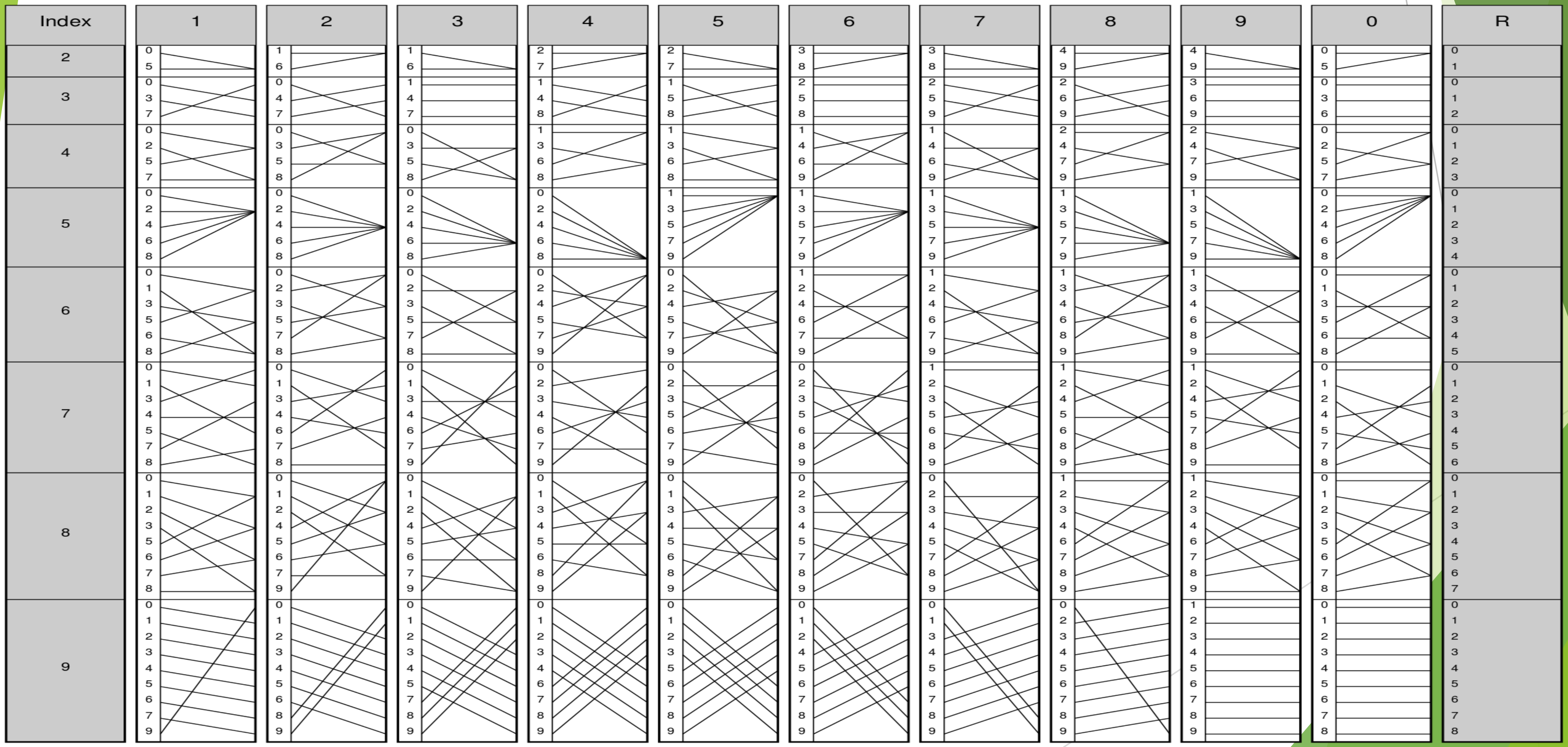
ネイピアの骨

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/6	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

1.3　背景
乗算のルーカス定規



1.4　背景
除算のルーカス定規



2.1 研究目的

・ルーカス定規と似たような道具としてネイピアの骨がある

・ネイピアの骨→乗算・除算・平方根がある

・ルーカス定規には平方根計算を行う道具が存在しない

↓

・本研究においてルーカス定規における平方根計算を行うことができる道具の作成を行う

３.１　関連する道具
ネイピアの骨とは

ネイピアの骨には九九の表が組み込まれている。

複数の桁からなる正の整数と、１桁の正の整数の掛け算の計算を足し算だけで済ますことができる。

乗算・除算・平方根を計算することが可能である。

一番上の正方形には1桁の数字が書かれており、それ以外の正方形には、一番上の正方形に書かれた数を2倍した数から9倍した数までが順番に書かれている。

3.2　関連する道具
ネイピアの骨

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0	0/0
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/6	3/6
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

４.1 ルーカス定規

・Henri GenailleとÉdouard Lucasによって発明された。

・左端の数字を掛けたり割ったりすることにより計算結果を読み取ることができる。

・掛け算や割り算の計算を行うための道具である。

・掛け算九九を知らなくても計算を求めることができる。

4.2 ルーカス定規 乗算構造及び特徴

		1	
1	0	0	1
2	0	0	2
2	1	0	3
3	0	0	3
3	1	0	4
3	2	0	5

赤い数字が表しているのは太線で表した数字と青線で表した数字との積を表している。

太線で示した２以降の数字においては数字が複数記載されている。

２の太線では赤い数字は2,3となっている。この数字の３は下の桁から足される可能性があるため整数においての２より上の桁３を用意しておく必要がある。なお、用意する数においては太字に記載された数だけ用意する必要がある。

4.3 ルーカス定規
乗算構造及び特徴

		4	
3	0	1	2
3	1	1	3
3	2	1	4

①３＊４であるので
計算結果の１の位は２
②３との掛け算であるので、
下から足される可能性があるのは
０・１・２のどれかなので
縦方向に３種類を用意する。
③上の桁に加える値は１。

４.4ルーカス定規
除算構造及び特徴

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	#DIV/0!
3	0	1	0	3	3	3	3	3	3	#DIV/0!
4	0	0	1	0	4	4	4	4	4	#DIV/0!
5	0	1	2	1	0	5	5	5	5	#DIV/0!
6	0	0	0	2	1	0	6	6	6	#DIV/0!
7	0	1	1	3	2	1	0	7	7	#DIV/0!
8	0	0	2	0	3	2	1	0	8	#DIV/0!
9	0	1	0	1	4	3	2	1	0	#DIV/0!
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	#DIV/0!

縦列を横列で割った際の余り。縦の数２・横の数を１とした際は２/1となりあまりは０となる。

割られる数が一桁の時あまりの種類が分かる。

４.５ルーカス定規
除算構造及び特徴

割られる数	3			4		
	商	商の1の位	余り	商	商の1の位	余り
1	0	0	1	0	0	1
2	0	0	2	0	0	2
3	1	1	0	0	0	3
4	1	1	1	1	1	0
5	1	1	2	1	1	1
6	2	2	0	1	1	2
7	2	2	1	1	1	3

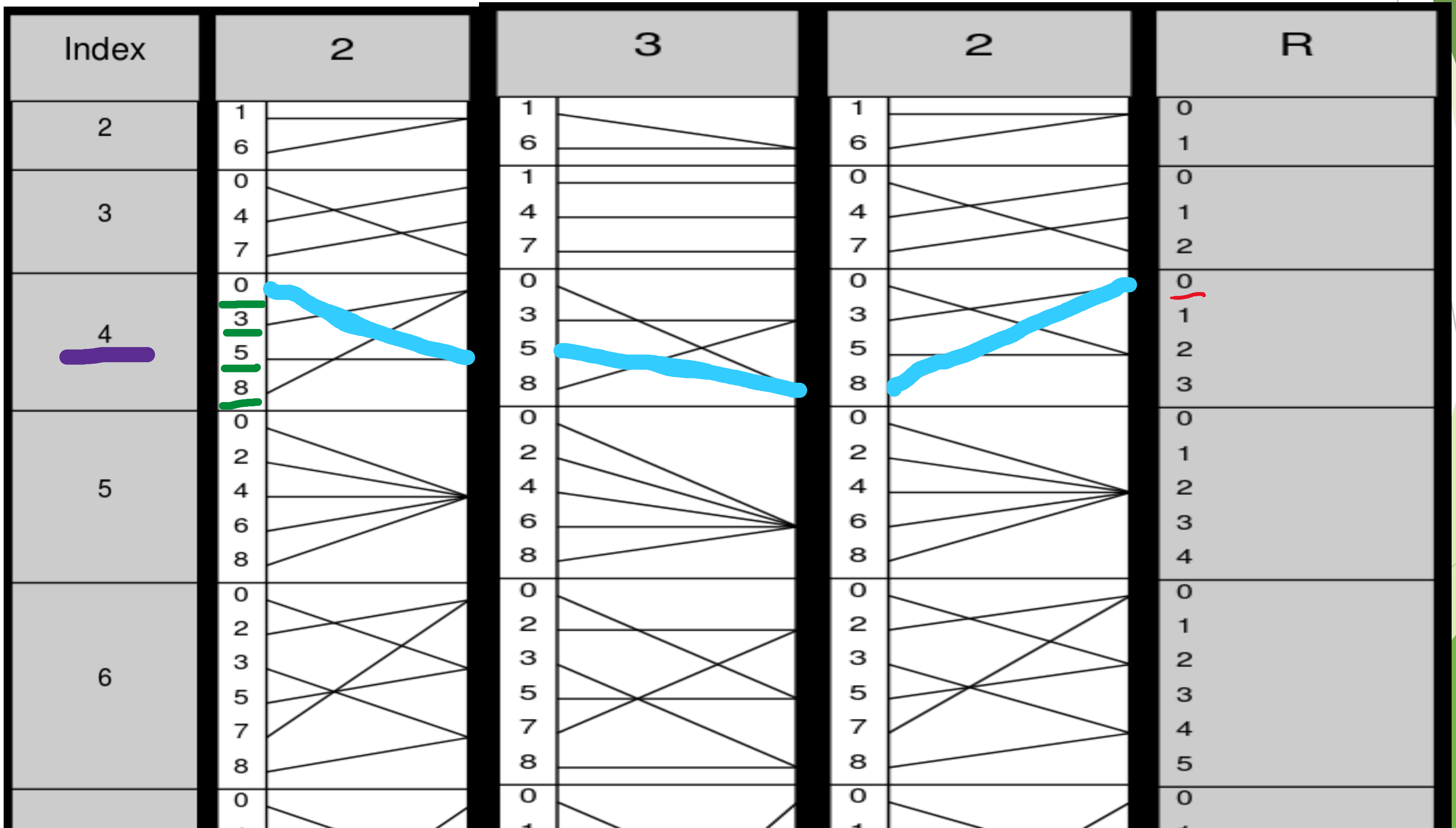
割られる数を1~99とし、
それぞれ２～９までの
商・商の１の位・余りを
求めた。ことにより
商の１の位に着目した際に
規則性が存在する。

４.６ルーカス定規
除算構造及び特徴

		4		
		商	商の１の位	余り
2	2	0	0	2
2	12	3	3	0
2	22	5	5	2
2	32	8	8	0
2	42	10	0	2
2	52	13	3	0
2	62	15	5	2
2	72	18	8	0
2	82	20	0	2
2	92	23	3	0

商の１の位に
着目した際に
規則性が存在する。
４の場合であれば
０・３・５・８
の順で繰り返されている。

２.１１ルーカス定規
除算構造及び特徴



４.７ルーカス定規
除算構造及び特徴

一番左の２の棒の緑色で着色した数字は上から０・３・５・８である。0の場合は、繰り下がりなし。3の場合は繰り下がり１。5の場合は繰り下がり２。8の場合は、繰り下がり３を表している。すなわち2/4余り２・12/4余り０・22/4余り2・32/4余り０を表している。なお、４で割っているので繰り下がりの数は0・１・2・３しか存在しないので４の時は４段である。

４.８ルーカス定規
除算構造及び特徴

大体の構造は割り算の筆算の時と同じであるがRの所に着目するとそれぞれの繰り下がりの数になっている。Index以外の数字の棒に書かれている数（２の棒であれば１・６）は商を表しており、線が指し示しているのが最終桁（右端）では余りであり、途中であれば繰り下がりである。

５．１提案手法と実験

・本研究では開平法について検討を行う。

・開平法のアルゴリズムを用いて作成を行う。

５．２提案手法と実験
開平法のアルゴリズム

①p_mを計算する。

②a_mの値の見当をつける。

与えられた$\sqrt{x}$に対し、10^kの位を求める。

$\sqrt{x} = \sum_{k \leq n} 10^k \, a_K$

xの首位をa_nとする。nは$\sqrt{x} < 10^{k+1}$を満たす最小のkとする。

$\sqrt{x}$の10^mの位より上の位p_mは分かっているとし、 10^mの位a_mを求める。

$p_m = \sum_{k=m+1}^{n} 10^{k-m-1} a_k = 10^{n-m-1} \, a_n + 10^{n-m-2} a_{n-1} + \cdots + 10 a_{m+2} + a_{m+1}$

a_mにおいては以下の式で表すことができる。

$$a_m \leq \frac{10^{-2m} x - 100 {p_m}^2}{20 p_m}$$

また、a_mの値は0から9までの10通りであるので、上記のa_mの式を用いて順に値を求めていく。

5.3提案手法と実験

開平法のアルゴリズムを用いて実際に求めた値

先頭の桁

$n_1=1$ならば$a_1=1$

$n_1=2$ならば$a_1=1$

$n_1=3$ならば$a_1=1$

$n_1=4$ならば$a_1=2$

$n_1=5$ならば$a_1=2$

$n_1=6$ならば$a_1=2$

$n_1=7$ならば$a_1=2$

$n_1=8$ならば$a_1=2$

$n_1=9$ならば$a_1=3$

同様にして３桁目（n_3)まで求めていく。

５.４提案手法と実験
作成方法

今回のケースでは100~990までの値を扱う

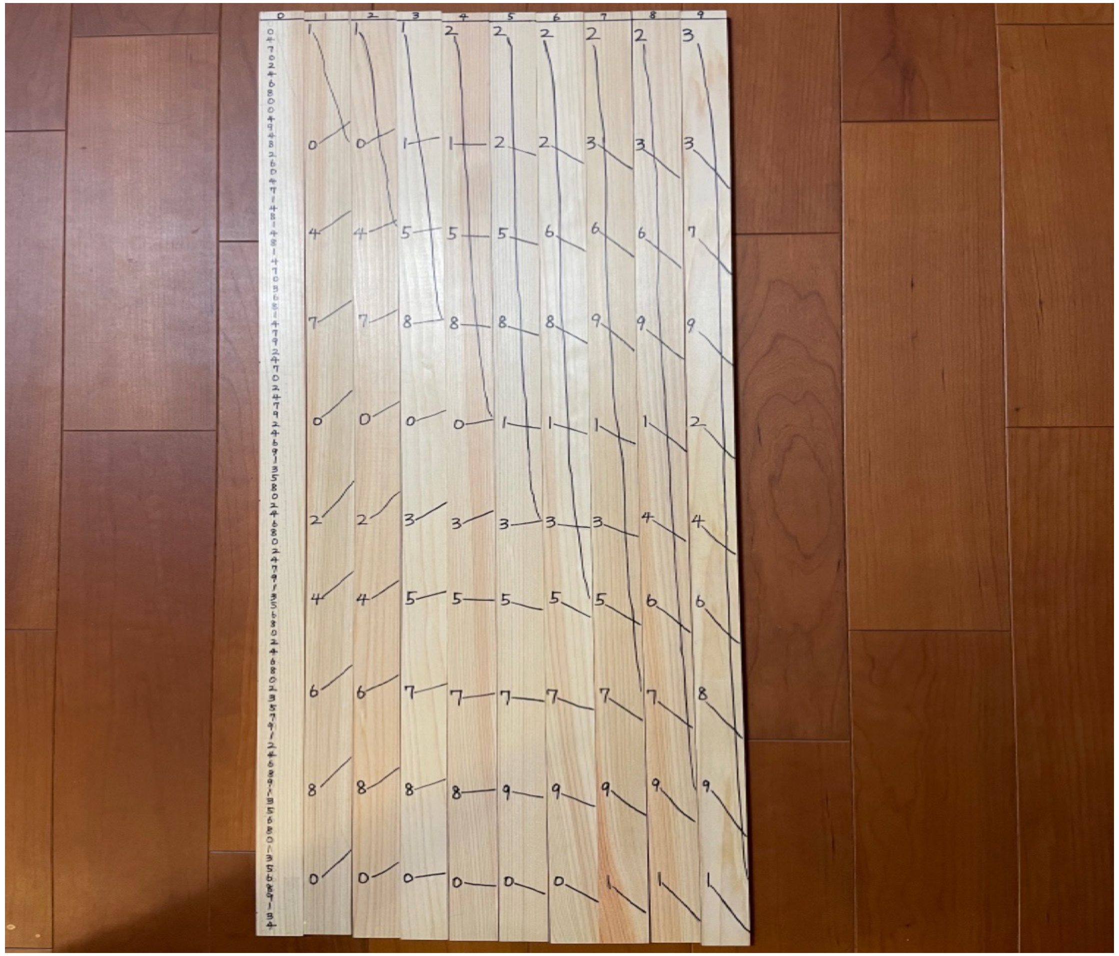
値を10ずつに区切る

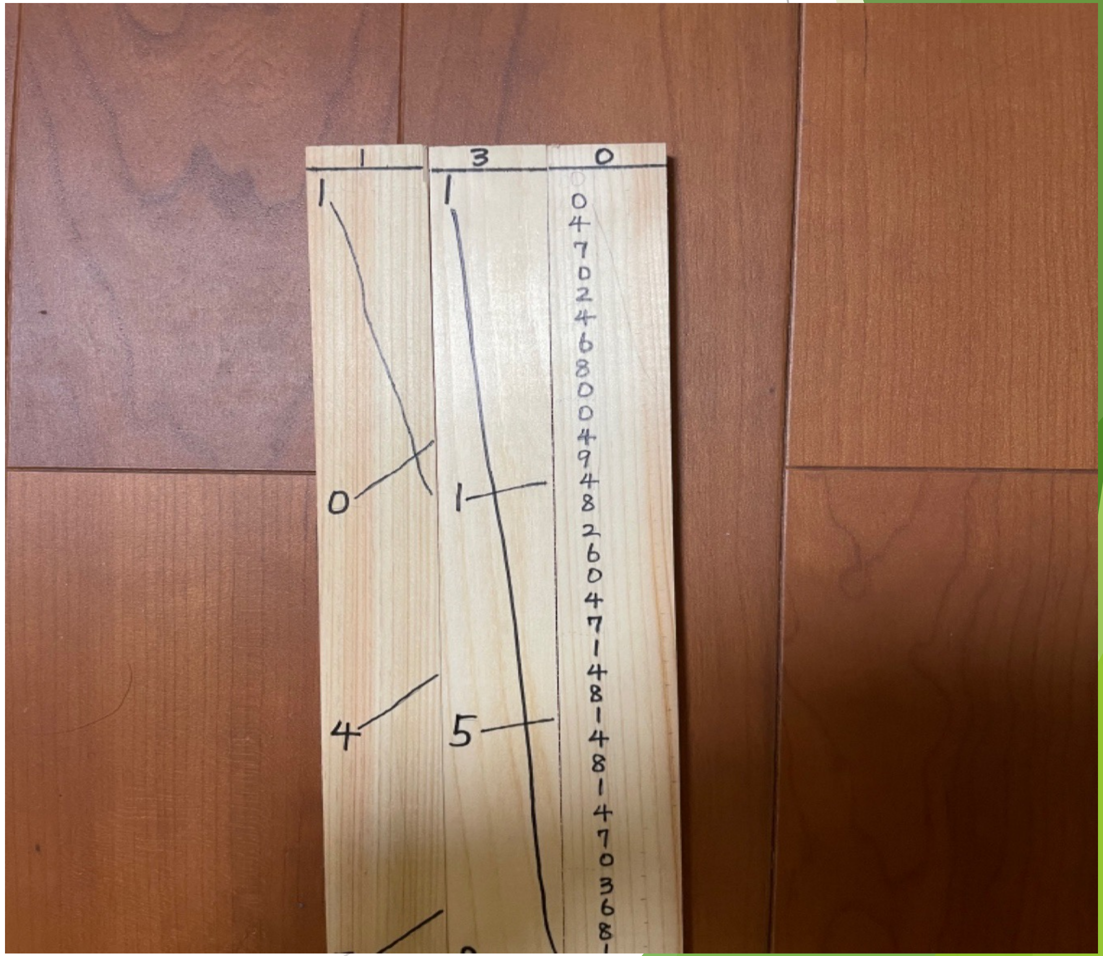
開平法において求めたアルゴリズムを用いて棒に数字を記載していく

記載した数字に対して一致する値を線で結んでいく

一致する値とは先頭の桁が１である場合には先頭がn_1=1 の時の２桁目のように値を条件ごとに区切っていく。

６.実験結果
作成したルーカス定規





７．考察

開平法を用いたアルゴリズム

↓

現段階では少数第１位までの値を求めることが可能

数を拡張した際にも同じようなアルゴリズムを用いて作成することが可能である。

８.今後の課題

・数を拡張して作成する必要がある。

・ルーカス定規を使用することにより乗算・除算・平方根に関して構造に目を向けてもらうことができるような方法を検討する。

↓

そのための問いが必要

参考文献

[1] https://wiis.info/blog/genaille-lucas-rulers/
（２０２２年1月閲覧）

[2] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lucas/
（２０２２年1月閲覧）

[3] Denis Roegel ,” Napier’s bones and Genaille-Lucas’s rods, Sep 2015“
https://hal.inria.fr/hal-01198447/document

[4]
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%96%8B%E5%B9%B3%E6%B3%95
（２０２２年1月閲覧）

[5] https://manabitimes.jp/math/1318
（２０２２年1月閲覧）