

正多面体図法を用いた球体と多面体における表面積の比較と 360° 画像を取り込んだ球体への利用

明星大学情報学部情報学科 山中研究室
19J5-058 : 小池空

1 はじめに

地球などの球体の情報を一度に全てを見渡すためには、球体を平面化することが必要である。先行研究である「正多面体図法を用いた歪みの少ない長方形世界地図図法の提案」[1]では、地球を正四面体に近似し、得られた正多面体を展開することで、面積の歪みが小さい長方形地図（オーサグラフ）で地球の地理情報を表現している。その中で、他の正多面体に近似を行うことで、表面積誤差を小さいよりよい地図を得られるのではないかと考えた。そこで、本研究ではオーサグラフの特徴を明らかにし、その特徴に基づいた表面積誤差の小さい地図について検討を行う。その上でオーサグラフの応用例としてより正確な地図について提案をすることを目的とした。面積に着目する手段として、球と近似された正多面体の表面積の比率を計算することとした。

2 正多面体図法

正多面体図法とは、球体を正多面体に投影し、その得られた正多面体を展開することで平面の地図を得る地図投影法の一つである。この正多面体図法を用いて、球体の面積比を保ったまま、正四面体に近似して地図を得る図法を鳴川は[1]において「オーサグラフ図法」(図1)と名づけ、

1. 世界地図の図郭が長方形である
2. 面積の歪みを低減する
3. 平面化された世界地図の一部を物理的に移動する操作により多方向に中心を移動できる

の3つの条件を満たしていると述べている。

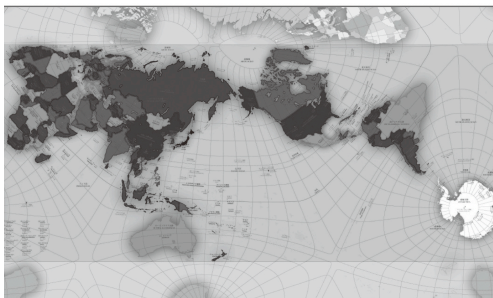


図 1: オーサグラフ [2]

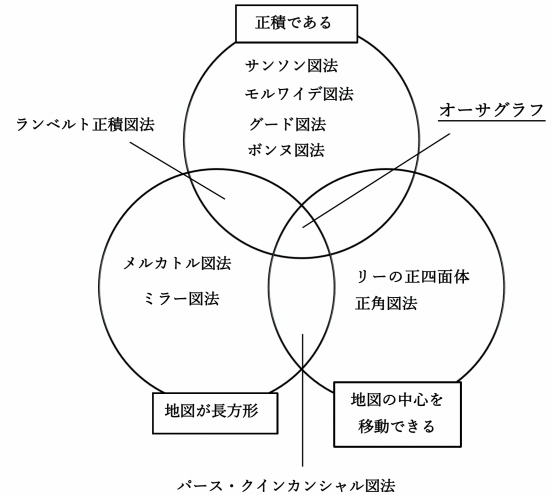


図 2: 各地図投影法を3つの要素で分類した図

3 オーサグラフ図法

3.1 オーサグラフ手法の手順 [1]

1. 球面を面積が等しい球面三角形領域に96分割する。
2. 曲面で構成された正四面体を球体に内接させる。96個の球面領域からこの曲面正四面体を96分割した領域に各々写像する。
3. 曲面正四面体の96の曲面領域から正四面体を96分割した領域に再び写像する。
4. 正四面体を展開することで長方形世界地図を作成する。

3.2 オーサグラフ図法の投影式

緯度 ϕ 、経度 λ によって表された球面の座標は以下の投影式によって xy 平面に投影することができる。

([2] に記載の数式をもとに導出)

$$x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 + \cos \lambda}{\sqrt{2 + \tan \phi}} \left\{ \lambda - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \lambda}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} - \frac{2 + \cos \lambda}{\sqrt{2 + \tan \phi}} \right)$$

4 検証

正多面体に対して外接球を考え、5つの正多面体の表面積の比較を行う。球の半径は1として、正多面体と外接球の表面積を求めることにした。半径が1の球に内接する正多面体の一辺の長さを表1に示す。

表 1: 半径が 1 の球に内接する正多面体の一辺の長さ

正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$

5 結果

球に内接するそれぞれの正多面体の表面積の計算結果を表 2 に示す。また表 2 の結果をもとに、外接する球の表面積に対するそれぞれの正多面体の表面積比率を表 3 に示す。

表 2: 球に内接する正多面体の表面積

多面体	表面積
正四面体	4.618802153517005
正六面体	8.000000000000002
正八面体	6.9282032302755105
正十二面体	10.514622242382675
正二十面体	9.574541383273939

表 3: 外接球の表面積に対する多面体の表面積の比率

多面体	正多面体の表面積/球の表面積
正四面体	0.3675525969478613
正六面体	0.6366197723675815
正八面体	0.5513288954217922
正十二面体	0.8367270523095958
正二十面体	0.7619177944929804

6 考察

球と近似された正多面体において表面積誤差が最も小さいのは正十二面体であるが、展開図が長方形でないという欠点が生じる。次に表面積誤差が小さいのは正二十面体であり、正二十面体の展開図の一部（球の 1/2 の領域）を図 3 のように長方形地図として得ることが可能である。また他の正多面体については、図 4 に表す球の範囲の長方形地図を生成可能である。このように、表面積誤差を最小化しようとする球体の一部の情報ではあるが、長方形の地図で表現できる。

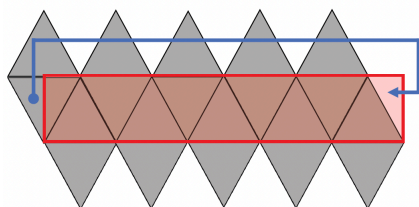


図 3: 正二十面体の展開図における長方形の切り出し

表 4: 長方形地図として表せる球の範囲

多面体	範囲
正四面体	100%
正六面体	約 66.7%
正八面体	75%
正十二面体	長方形で表せない
正二十面体	50%

7 360° 画像への利用

オーサグラフ手法を用いることにより、球体にマッピングした 360° 画像を歪みのない平面で表現する。マッピングするための 360° 画像として図 4 を用い、この画像を Unity 上で生成した球体にマッピングしたものを図 5 に示す。現段階では、球体を正多面体に近似するプログラムは未完成である。



図 4: 使用した 360° 画像 [5]



図 5: 360° 画像を取り込んだ球体

8 結論

地球全体を平面で表現するには正四面体への近似が有効であるが、二番目に表面積誤差が小さい正二十面体は、オーサグラフのアプローチから球体の 1/2 程度を長方形の形で表現できる。また、正二十面体の球への内接の仕方によって地球の赤道以外の場所について長方形地図で表現可能である。

また、今後の課題として正多面体を用いた実際の地図を作成すること、360° 画像を取り込んだ球体を自作プログラムによって、Unity 上で面積の歪みの少ない平面で表現することが挙げられる。

参考文献

- [1] 鳴川 肇, "正多面体図法を用いた歪みの少ない長方形世界地図図法の提案", <https://gakkai.sfc.keio.ac.jp/journal/.assets/SFCJ17-1-10.pdf>, 2017.
- [2] 鳴川 肇, "オーサグラフ図法の数式化と歪み評価", 日本地図学会, 「地図」 Vol.60 No.1, 2022.
- [3] 宮崎興二, "多面体百科", 丸善出版株式会社, 平成 28 年.
- [4] 日比孝之, "凸多面体論", 共立出版株式会社, 2022 年 3 月.
- [5] Poly Haven, <https://polyhaven.com/hdris>