

# 正多面体図法を用いた球体と多面体における 表面積の比較と360°画像を取り込んだ球体への利用

山中研究室

19J5-058 : 小池 空

地球などの球体の情報を一度に全てを見渡すためには、球体を平面化することが必要。

鳴川による先行研究では、地球を**正四面体**に近似し、得られた多面体を展開することで、**面積の歪みが小さい長方形地図（オーサグラフ）**で地球の地理情報を表現している。

他の正多面体に近似を行うことで、表面積誤差を小さくしたよりよい地図を得られるのではないか。

- オーサグラフの特徴を明らかにし，その特徴に基づいた表面積誤差の小さい地図について検討を行う．その上でオーサグラフの応用例としてより面積が正確な地図について提案をする．
- 面積に着目するための手段として，球と近似された正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の表面積の比率を計算することとした．

# 正多面体図法とオーサグラフ

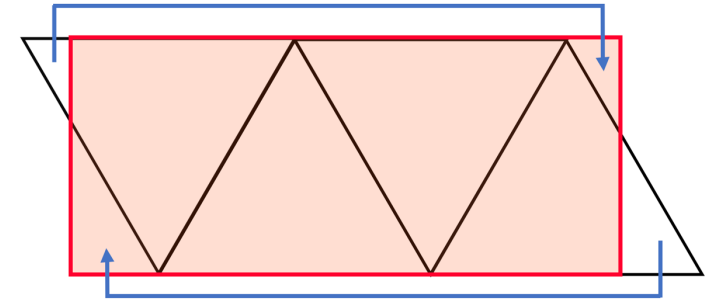
地球などの球体を正多面体に投影し, その得られた正多面体を展開することで, 平面の地図を得る地図投影法の一つ.

正四面体に投影して地図を得たもの: オーサグラフ

(鳴川の「多面体図法を用いた歪みの少ない長方形世界地図図法の提案」より)

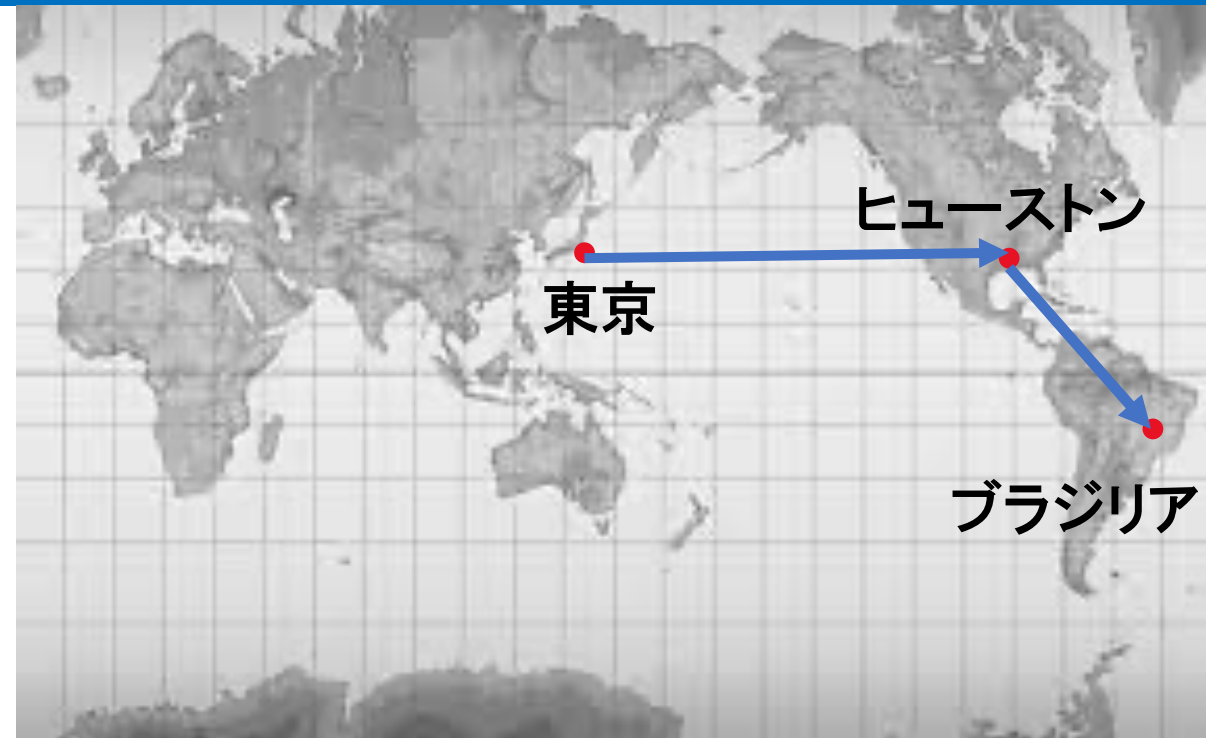


1. 世界地図の図郭が長方形である



2. 面積の歪みが低減されている

3. 平面化された世界地図の一部を物理的に移動する操作により多方向に中心を移動できる



## メルカトル図法

日本からブラジルに行くのに、  
ヒューストンを経由しているように  
見える

## オーサグラフ

日本からブラジルの直線航路では、  
ヒューストンの上空を通ることがわか  
る

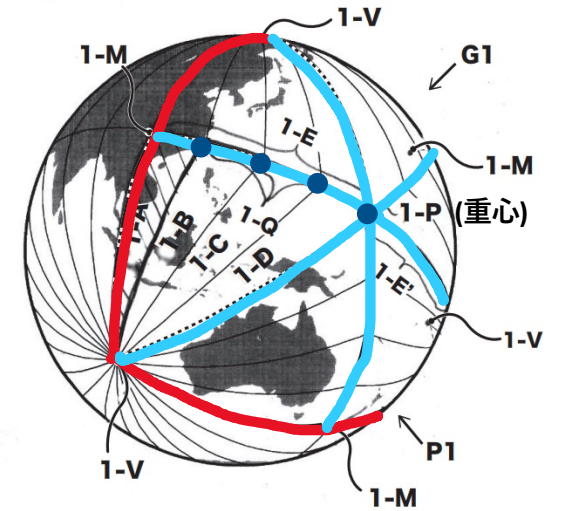
(図の出典：「多面体図法を用いた歪みの少ない長方形世界地図図法の提案」)

## <手順1>

球面を面積が等しい球面三角形領域に **96 分割** する.

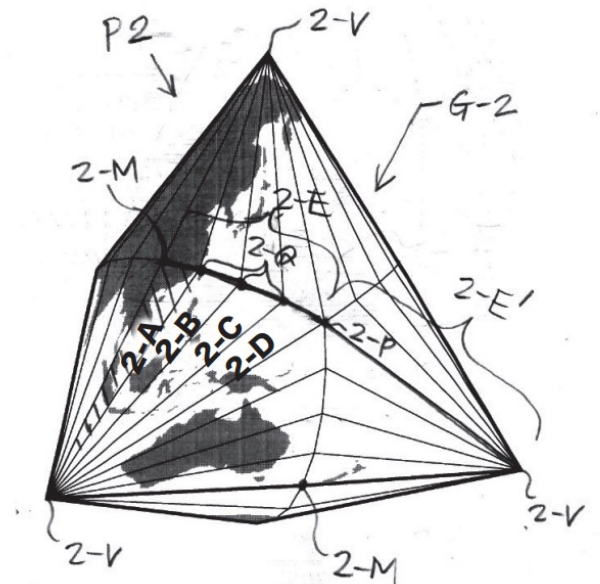
“1-V” は、近似を行う正四面体の4つの頂点で、最短距離で互いに結ぶことで4つの面を形成する（1つの面は24の球面三角形領域に分割される）.

“1-E” 間を、 $[0.939 : 0.9553 : 1.000 : 1.064]$ の比で4分割することで球面三角形領域を等面積にする.



## <手順2>

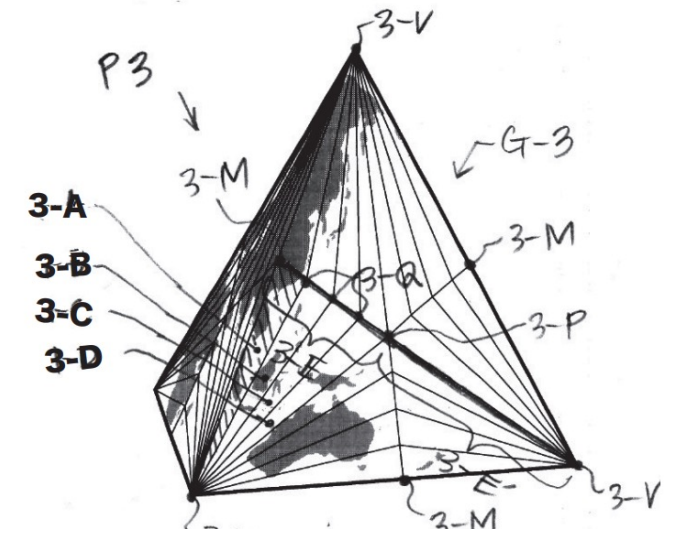
曲面で構成された**正四面体**を球体に内接させる. 96 個の球面領域からこの**曲面正四面体**を 96 分割した領域に各々写像する.





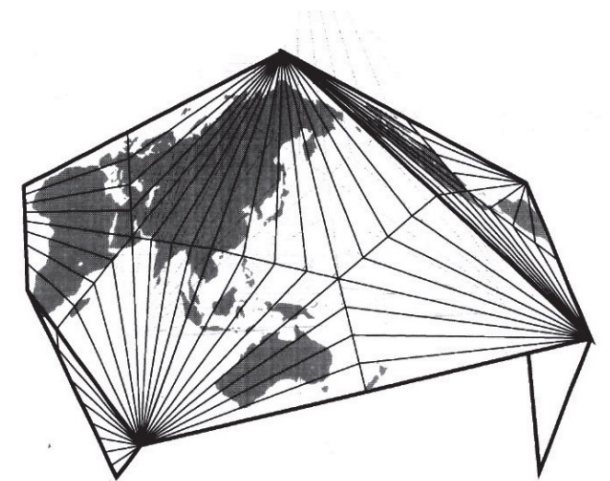
## <手順3>

曲面正四面体の複数の面を一つの平面に統合しつつ、96の曲面領域から正四面体を96分割した領域に再び写像する。



## <手順4>

正四面体を展開することで、長方形世界地図を作成する。



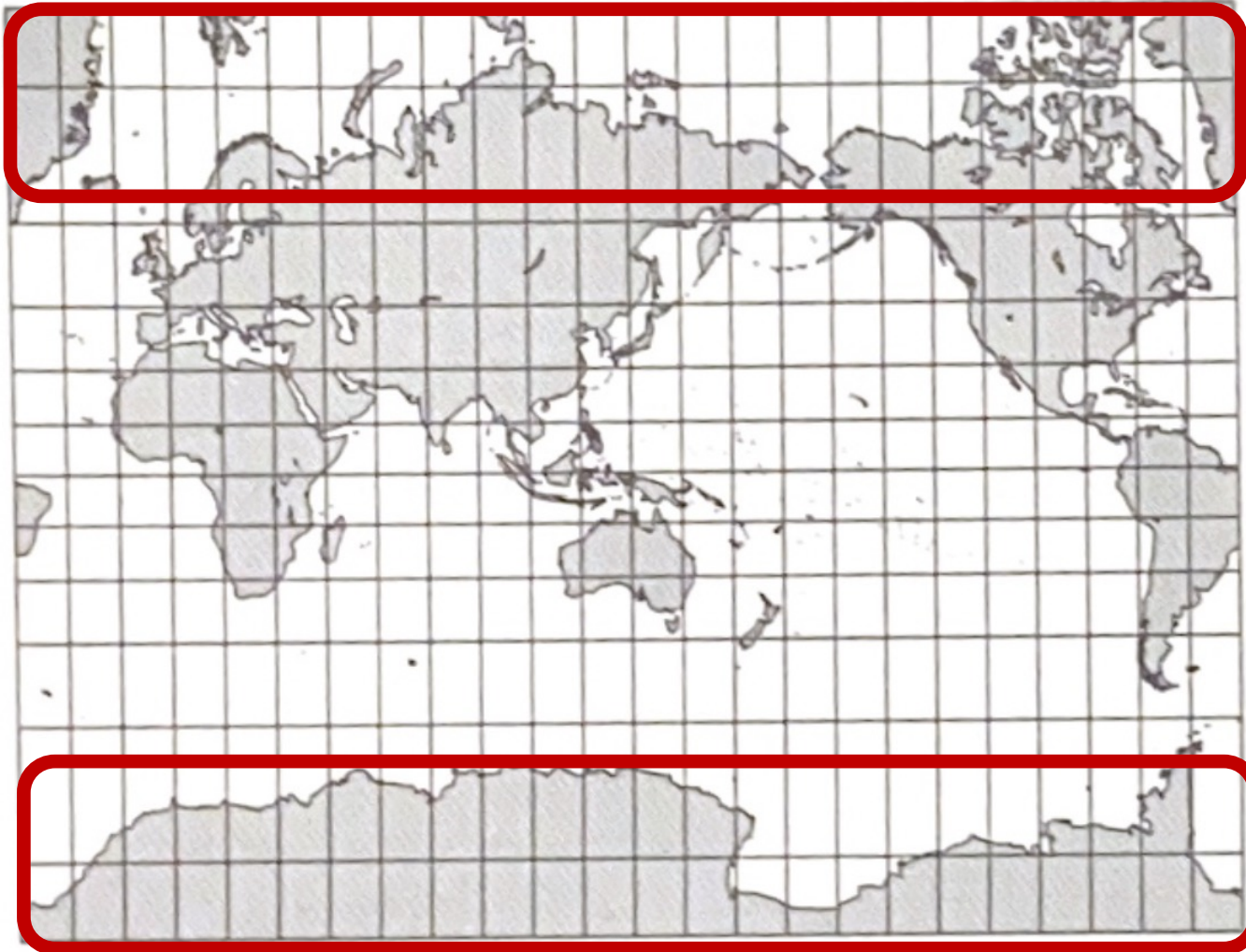
緯度  $\varphi$ , 経度  $\lambda$  によって表された球面の座標は以下の投影式によって  $xy$  平面に投影することができる。

(「オーサグラフ図法の数式化と歪み評価」に記載の数式をもとに導出)

$$x = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 + \cos \lambda}{\sqrt{2} + \tan \varphi} \left\{ \lambda - \sin^{-1} \left( \frac{\sin \lambda}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} - \frac{2 + \cos \lambda}{\sqrt{2} + \tan \varphi} \right)$$

# 各地図投影法の利点と欠点

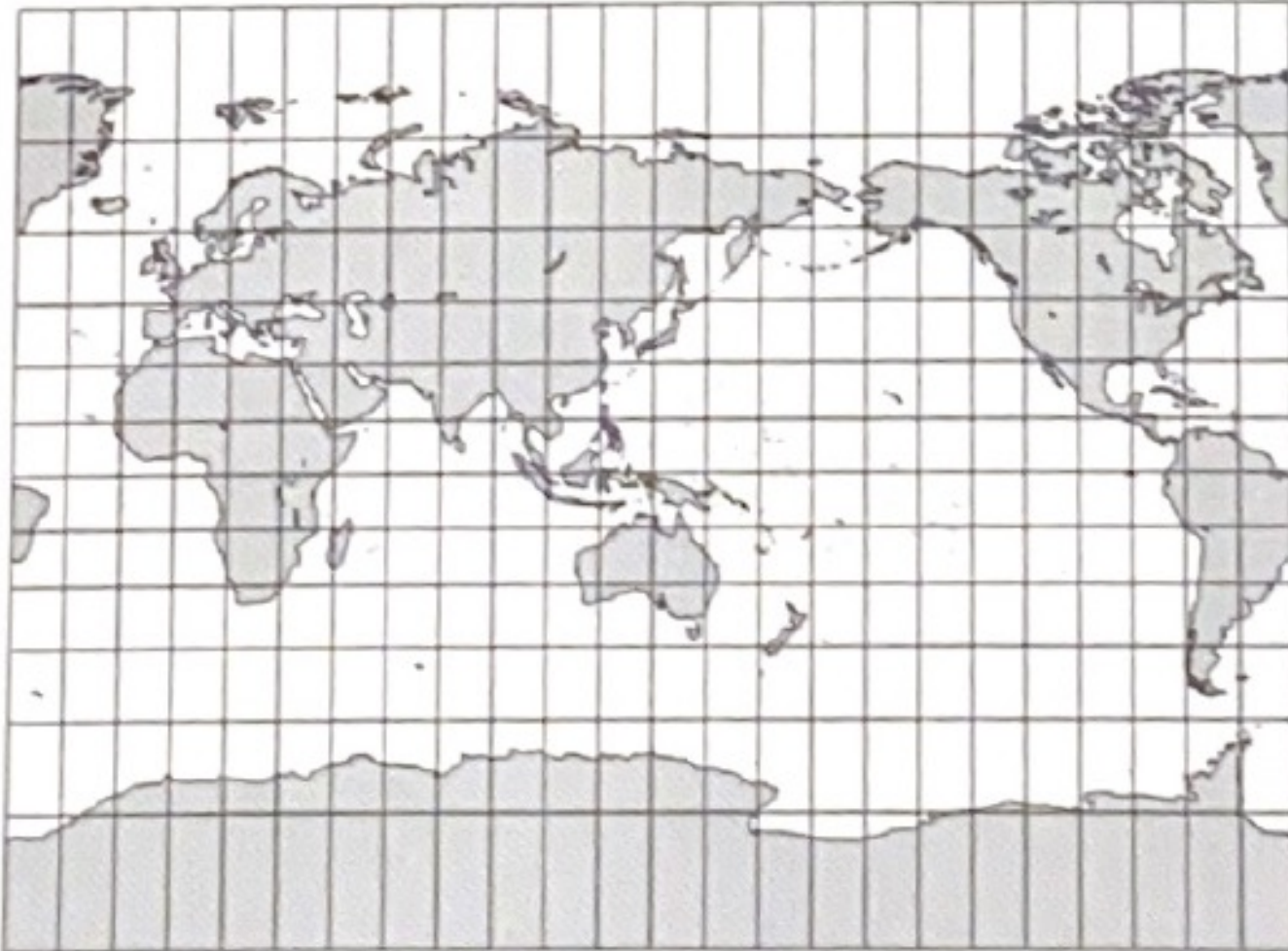


## 利点

航路の出発地と目的地を結んでできる直線と経線からできる角度がコースのどの地点でも一定になる（正角図法）

## 欠点

低緯度に対して高緯度の面積が大幅に拡大され，両極は表現できない

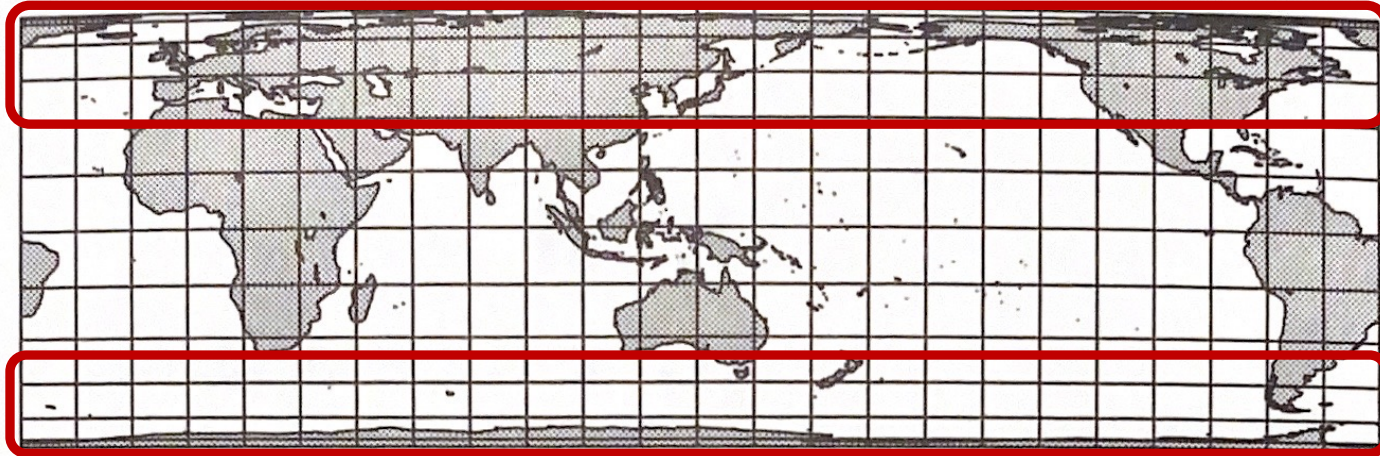


## 利点

メルカトル図法を改良し高緯度の拡大を緩和し，極が表現されている

## 欠点

地図において角度や面積が正しく表現されていない

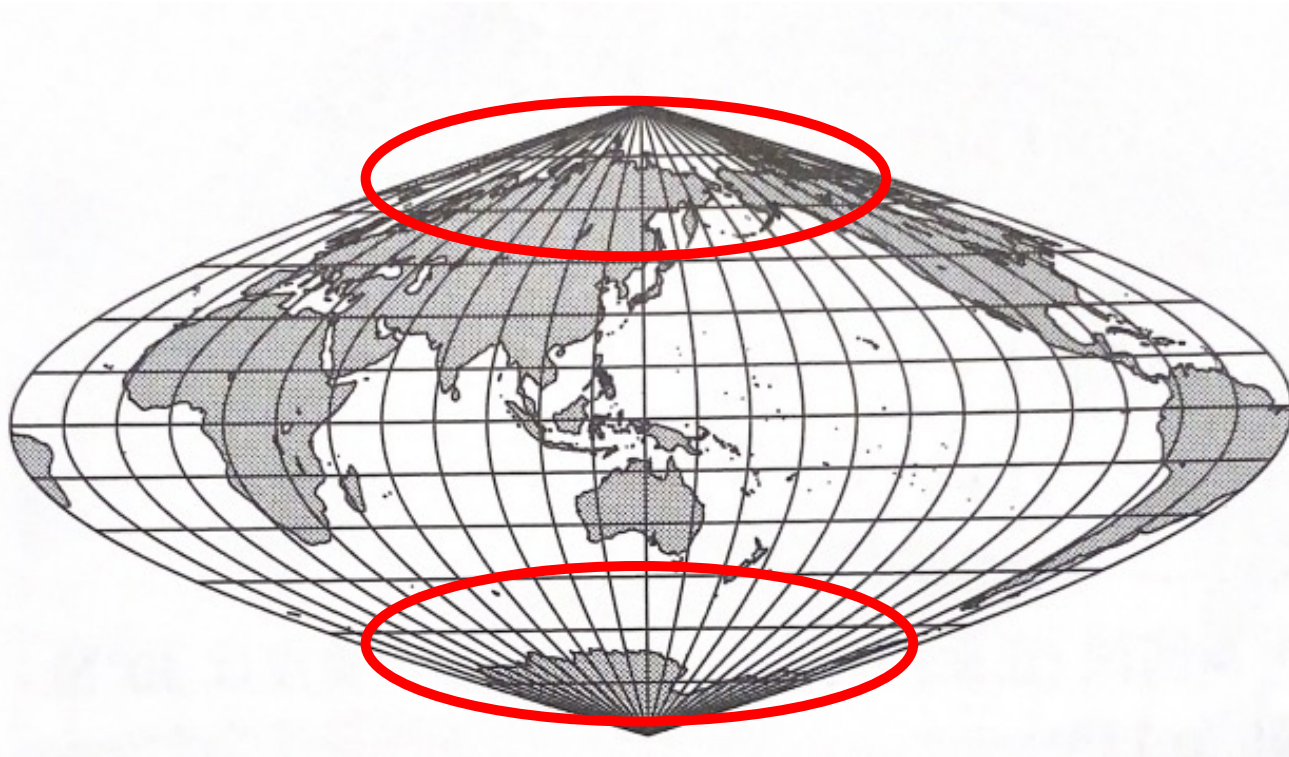


## 利点

地球上のどの部分についても、その面積比率が地図上に正しく表現される（正積図法）

## 欠点

赤道付近を含む低緯度では図形形状の歪みが小さいが、中高緯度では図形の形状の歪みが大きい

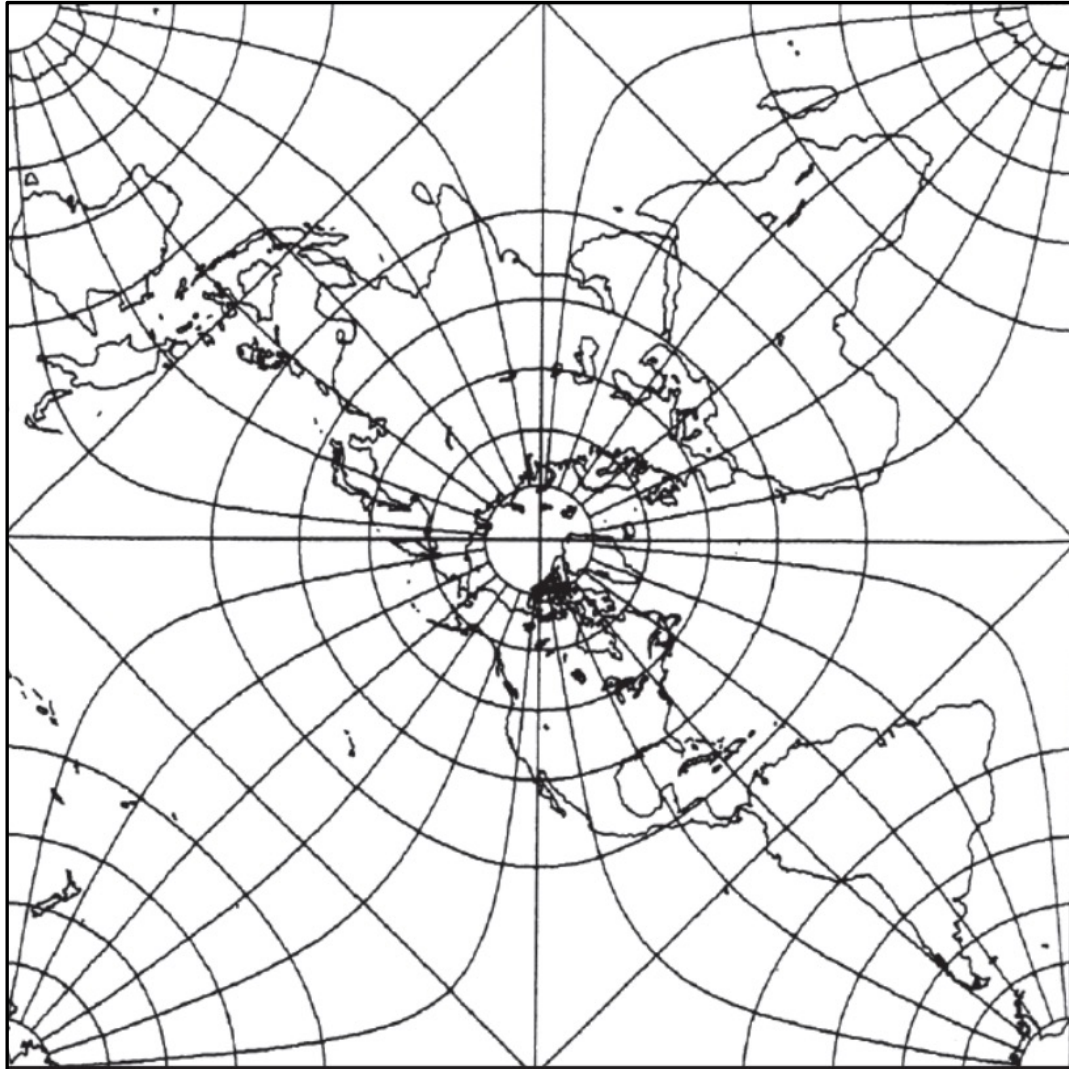


## 利点

中央経線と直交する各緯線が正しい距離である。地球上のどの部分についても、その面積比率が地図上に正しく表現される（正積図法）

## 欠点

低緯度の形状の歪みは小さいが高緯度になればなるほど形状が歪んでしまう



## 利点

球体を正方形に写像する図法で、正方形の4つの角を除き角度が等しくなる

## 欠点

面積の歪みが、正方形の中心から外側に向かって大きくなる



# 3つの要素による地図の分類

「正積である」とは：  
球面上の図形の面積比が地図上でも  
正しく表されるということ

面積が正しい  
(正積である)

サンソン図法  
モルワイデ図法  
グード図法  
ボンヌ図法

オーサグラフ

ランベルト正積図法

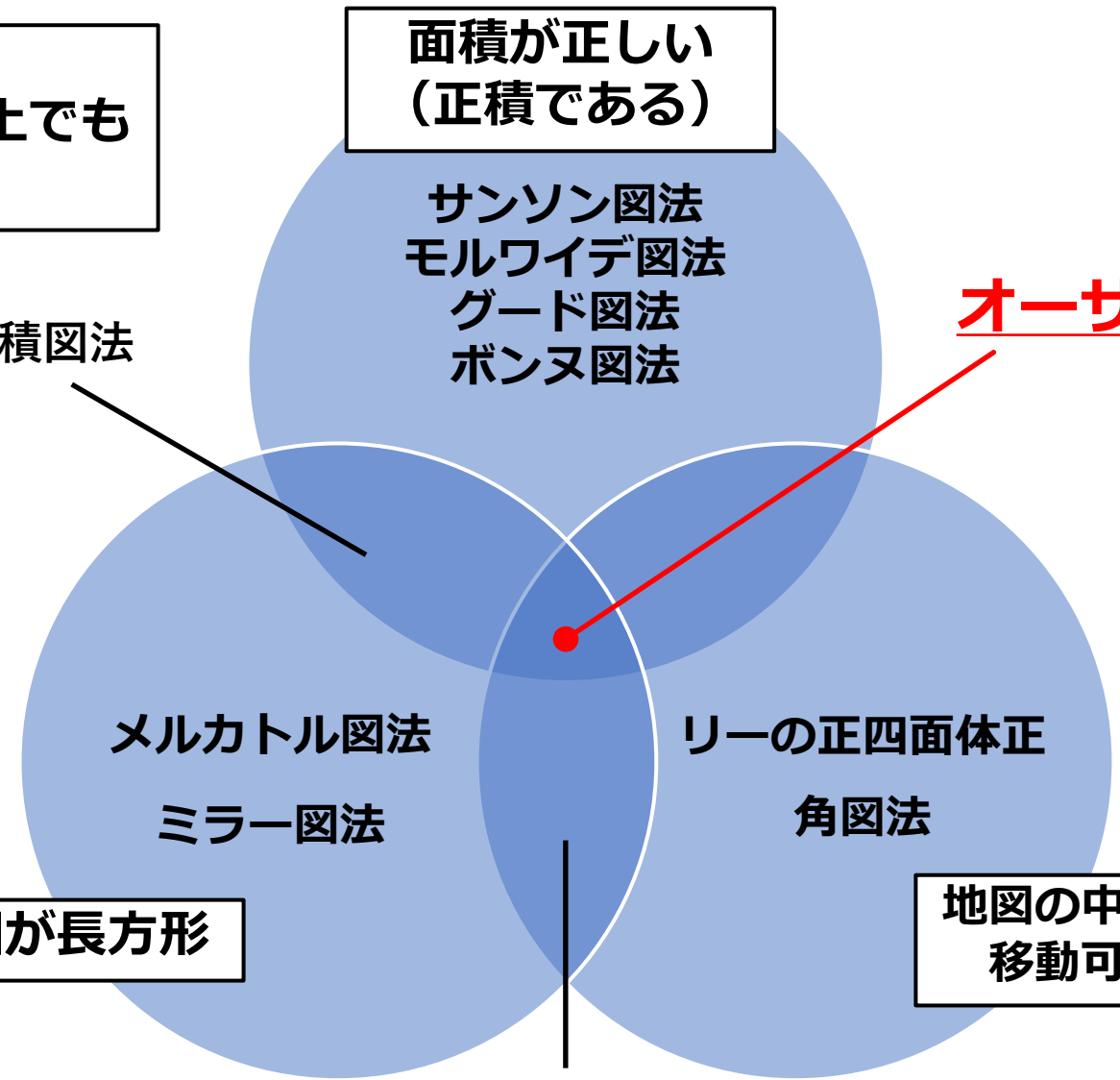
メルカトル図法  
ミラー図法

リーの正四面体正  
角図法

地図が長方形

地図の中心が  
移動可能

パース・クインカンシャル図法



# 球と正多面体の表面積の比較

球に内接する正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の表面積の比較を行う.

正多面体の表面積の計算は, 半径が 1 の球に内接する正多面体の一辺の長さをもとにすることで求めることとした.

表1:球に内接する正多面体一辺の長さ

	正四面体	正六面体	正八面体	正二十面体	正二十面体
一辺の長さ	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}$

球に内接する正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の表面積の計算結果を以下の表2に示す。

表2：球に内接する正多面体の表面積

多面体	表面積
正四面体	4.618802153517005
正六面体	8.0000000000000002
正八面体	6.9282032302755105
正十二面体	10.514622242382675
正二十面体	9.574541383273939

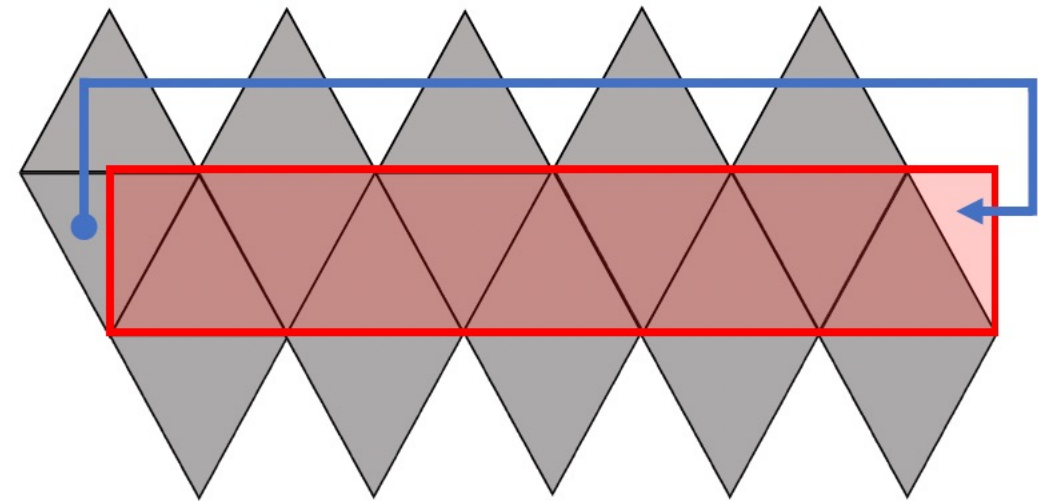
表2の結果をもとに外接する球の表面積に対する正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体の表面積の比率を表3に示す.

表3 : 外接球の表面積に対する多面体の表面積の比率

多面体	正多面体の表面積/球の表面積
正四面体	0.3675525969478613
正六面体	0.6366197723675815
正八面体	0.5513288954217922
正十二面体	0.8367270523095958
正二十面体	0.7619177944929804

- 球と近似された正多面体において表面積誤差が最も小さい  
→ 正十二面体 → **展開図が長方形にならない**
- 次に表面積誤差が小さいのは正二十面体  
→ **展開図の一部を長方形**として取り出す  
ことが可能 (球の1/2の領域)

球体全体を表そうとすると表面積誤差  
が大きくなる

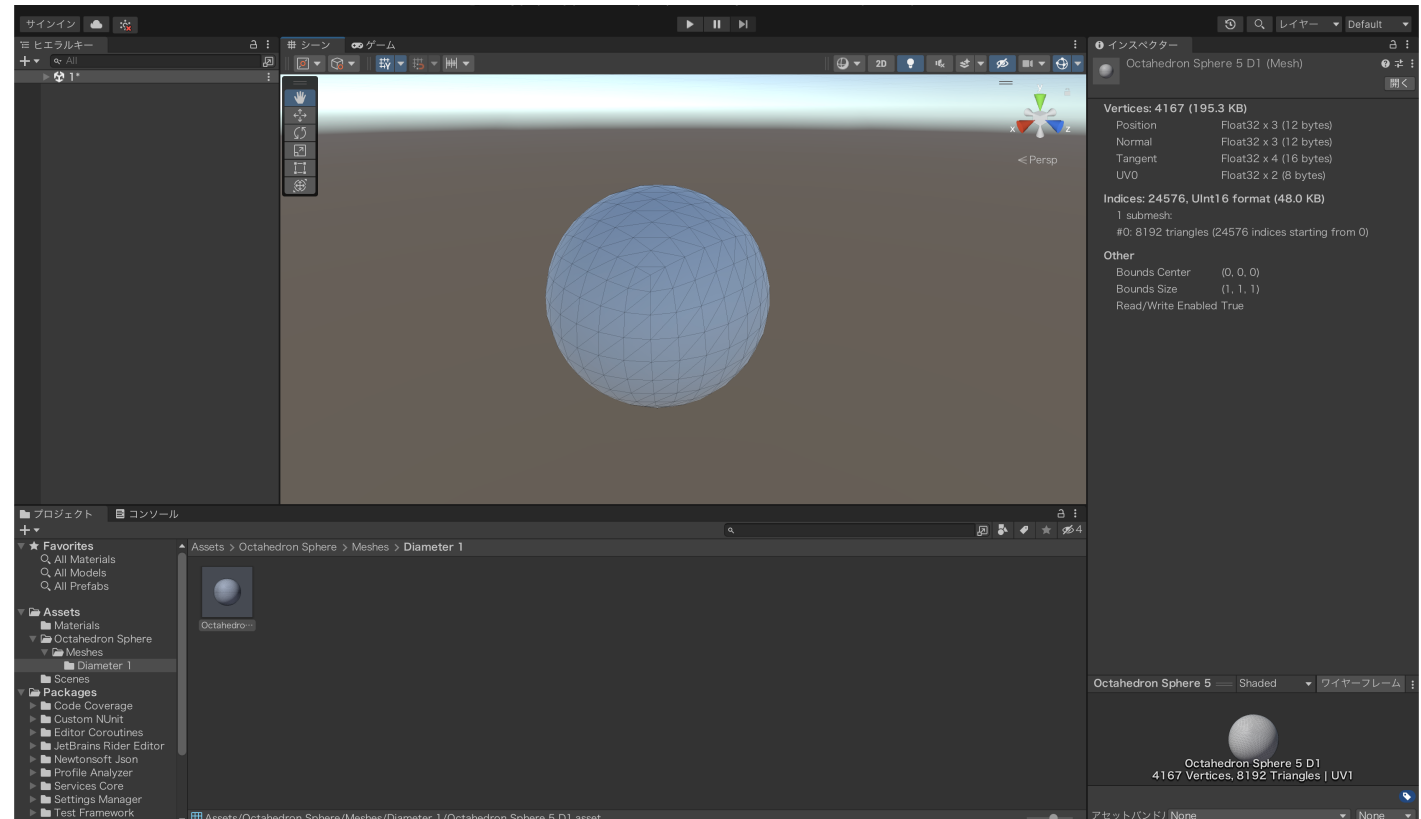


グレーの部分：もと正二十面体の展開図  
赤枠：得られる長方形地図

# Unity を用いた正多面体図法の360° 画像への利用

Unity とは、ユニティ・テクノロジー社が提供するゲーム開発プラットフォームである。

Unity で使用できるプログラミング言語は主に「JavaScript」「C#」である。今回球体という 3D 立体を扱うことにより、この Unity を使うこととした。



Unity上の画面  
(使用したバージョン : 2021.3.15f1 Personal)



球体を96分割し、最終的に球体を正四面体に近似することにより、球体にマッピングした360°画像を歪みのない平面で表現する。

球体にマッピングするための360°画像として次のスライドの図1を用いた。この画像をUnityで生成した球体にマッピングしたものを図2に示す。現段階では、球体を正多面体に近似するプログラムは未完成である。



図1：使用した360°画像  
(出典： Poly Haven)

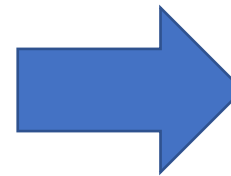


図2：360°画像をマッピングした球

- 球全体を平面で表現するには正四面体への近似が有効であるが、二番目に表面積誤差が小さい正二十面体は、オーサグラフのアプローチから球体の一部（1/2程度）を長方形の形で表現できる。
- また、正二十面体の球への内接の仕方によっては、地球の赤道以外の場所について長方形地図で表現可能である。

## 今後の課題

- 正多面体を用いた実際の地図を作成すること
- 360°画像を取り込んだ球体を自作プログラムによって、Unity上で面積の歪みの少ない平面で表現すること